

9.3 Ecuaciones paramétricas y Cálculo

CONTENIDO ▪
Pendiente y rectas tangentes ▪
Longitud de arco ▪
Área de una superficie de revolución ▪

Pendiente y rectas tangentes

Ahora que sabemos representar una gráfica en el plano mediante ecuaciones paramétricas, es natural preguntarnos cómo aplicar el Cálculo al estudio de curvas planas. Para empezar, fijémonos de nuevo en el proyectil representado por las ecuaciones paramétricas

$$x = 24\sqrt{2}t \quad \text{e} \quad y = -16t^2 + 24\sqrt{2}t$$

que muestra la Figura 9.27. Por lo visto en la Sección 9.2, estas ecuaciones nos permiten localizar la posición del proyectil en un instante dado. También sabemos que el objeto se ha lanzado con un ángulo inicial de 45°. Pero, ¿cómo podemos hallar el ángulo θ que determina la dirección del objeto en cualquier otro instante t? El siguiente teorema responde esta pregunta proporcionando una fórmula de la pendiente de la recta tangente en función de t.

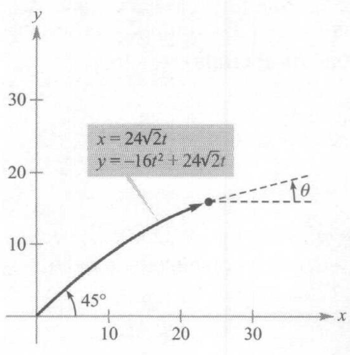


FIGURA 9.27
En el instante t, el ángulo de elevación del proyectil es θ, la pendiente de la recta tangente en ese punto.

TEOREMA 9.7 FORMA PARAMÉTRICA DE LA DERIVADA

Si una curva suave C viene dada por las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, la pendiente de C en (x, y) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Demostración: En la Figura 9.28, consideremos $\Delta t > 0$ y sean:

$$\Delta y = g(t + \Delta t) - g(t) \quad \text{y} \quad \Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$$

Como $\Delta x \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$ podemos escribir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{f(t + \Delta t) - f(t)}$$

Dividiendo el numerador y el denominador por Δt, podemos usar la derivabilidad de f y g para concluir que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[g(t + \Delta t) - g(t)]/\Delta t}{[f(t + \Delta t) - f(t)]/\Delta t} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

□

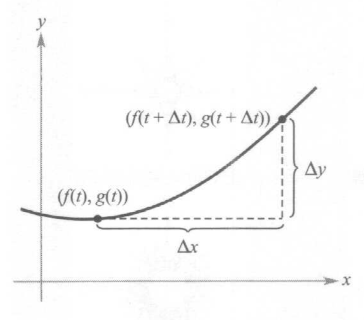


FIGURA 9.28
La pendiente de la recta secante por los puntos $(f(t), g(t))$ y $(f(t + \Delta t), g(t + \Delta t))$ es $\Delta y/\Delta x$.

EJEMPLO 1 Derivación en forma paramétrica

Hallar dy/dx para la curva dada por $x = \text{sen } t$ e $y = \cos t$.

ADVERTENCIA La curva del Ejemplo 1 es una circunferencia. Usando la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\text{tg } t$$

hallar su pendiente en los puntos (1, 0) y (0, 1).

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\text{sen } t}{\cos t} = -\text{tg } t$$ □

Dado que dy/dx es función de t, podemos aplicar el Teorema 9.7 reiteradamente para calcular derivadas de orden superior. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dx/dt} \qquad \text{Segunda derivada}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{dx/dt} \qquad \text{Tercera derivada}$$

EJEMPLO 2 Determinación de la pendiente y la concavidad

Dada la curva de ecuaciones

$$x = \sqrt{t} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{4}(t^2 - 4), \quad t \geqslant 0$$

hallar su pendiente y su concavidad en el punto (2, 3).

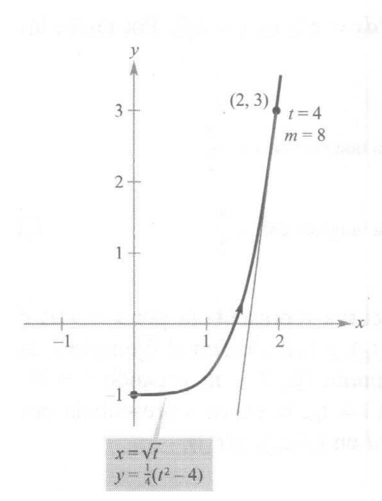


FIGURA 9.29
La gráfica es cóncava hacia arriba en (2, 3), cuando $t = 4$.

Solución: Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(1/2)t}{(1/2)t^{-1/2}} = t^{3/2}$$

la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}[dy/dx]}{dx/dt} = \frac{\frac{d}{dt}[t^{3/2}]}{dx/dt} = \frac{(3/2)t^{1/2}}{(1/2)t^{-1/2}} = 3t$$

En $(x, y) = (2, 3)$, se tiene $t = 4$, y la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = (4)^{3/2} = 8$$

Además, cuando $t = 4$, la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3(4) = 12 > 0$$

luego la gráfica es cóncava hacia arriba en (2, 3), como corrobora la Figura 9.29. □

Puesto que las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ no definen necesariamente y como función de x, una curva plana puede cortarse a sí misma. En tales puntos, la curva puede tener más de una recta tangente, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Una curva con dos tangentes en un punto



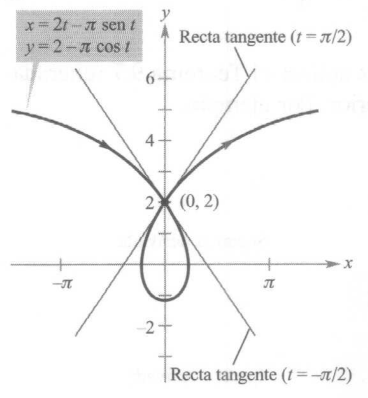


FIGURA 9.30
La cicloide larga tiene dos rectas tangentes en el punto (0, 2).

La **cicloide larga** de ecuaciones

$$x = 2t - \pi \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad y = 2 - \pi \cos t$$

se corta a sí misma en el punto (0, 2) (Figura 9.30). Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes en ese punto.

Solución: Puesto que $x = 0$ e $y = 2$ en $t = \pm\pi/2$ y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\pi \operatorname{sen} t}{2 - \pi \cos t}$$

tenemos que $dy/dx = -\pi/2$ en $t = -\pi/2$ y $dy/dx = \pi/2$ en $t = \pi/2$. Por tanto, las dos rectas tangentes en (0, 2) son

$$y - 2 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)x \qquad \text{Recta tangente en } t = -\frac{\pi}{2}$$

$$y - 2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)x \qquad \text{Recta tangente en } t = \frac{\pi}{2}$$

□

Si $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$ en $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ posee una tangente *horizontal* en $(f(t_0), g(t_0))$. Así, en el Ejemplo 3, la curva tiene una tangente horizontal en el punto $(0, 2 - \pi)$ (cuando $t = 0$). Análogamente, si $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$ en $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ tiene una tangente *vertical* en $(f(t_0), g(t_0))$.

Longitud de arco

Hemos visto cómo utilizar las ecuaciones paramétricas para describir la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano. Desarrollaremos ahora una fórmula para calcular la *distancia* recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria.

Recordemos de la Sección 6.4 que la fórmula para la longitud de arco de una curva dada por $y = h(x)$ sobre el intervalo $[x_0, x_1]$ es

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [h'(x)]^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Si C viene representada por las ecuaciones $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, y si $dx/dt = f'(t) > 0$, se obtiene

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}{(dx/dt)^2}}\, \frac{dx}{dt}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

TEOREMA 9.8 LONGITUD DE ARCO EN FORMA PARAMÉTRICA

Si una curva suave C dada por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ no tiene autointersecciones en el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, entonces la longitud de arco de C en el intervalo viene dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

| Nota. Al aplicar la fórmula de la longitud de arco a una curva, hay que asegurarse de que la curva se recorre sólo una vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, la circunferencia dada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ se recorre una vez en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, pero dos veces en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$.

En la sección precedente vimos que si un círculo rueda a lo largo de una recta, cada punto de su circunferencia describe una trayectoria denominada cicloide. Si el círculo rueda alrededor de otro, la trayectoria del punto se llama **epicicloide**. El siguiente ejemplo muestra cómo calcular la longitud de arco de una epicicloide.

ARCO DE UNA CICLOIDE

La longitud de un arco de cicloide fue calculada por primera vez en 1658 por el arquitecto y matemático británico Christopher Wren, famoso por reconstruir un gran número de edificios e iglesias en Londres, incluida la Catedral de San Pablo.

EJEMPLO 4 Cálculo de una longitud de arco

Un círculo de radio 1 rueda alrededor de otro mayor, de radio 4 (Figura 9.31). La epicicloide descrita por un punto de la circunferencia del círculo más pequeño viene dada por

$$x = 5\cos t - \cos 5t \quad \text{e} \quad y = 5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t$$

Hallar la distancia recorrida por el punto en una vuelta completa alrededor del círculo mayor.

Solución: Antes de aplicar el Teorema 9.8, observemos (Figura 9.31) que la curva tiene puntos angulosos cuando $t = 0$ o $t = \pi/2$. Entre estos puntos, dx/dt y

dy/dt no se anulan simultáneamente. Así pues, la porción de curva de $t = 0$ a $t = \pi/2$ es suave. Para hallar la distancia total recorrida por el punto, podemos calcular la longitud de arco de la porción de curva del primer cuadrante y multiplicarla por 4.

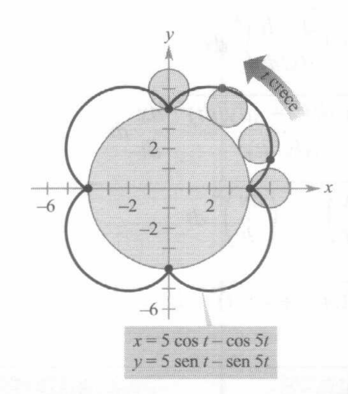
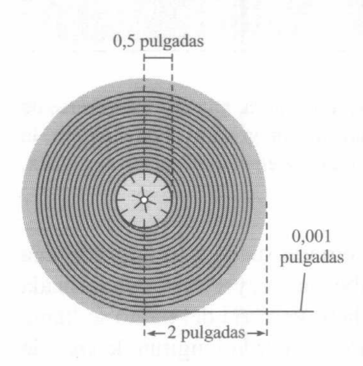


FIGURA 9.31
Cada punto del círculo pequeño describe una epicicloide cuando éste rueda alrededor del círculo grande.

$$
\begin{aligned}
s &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5 \text{ sen } t + 5 \text{ sen } 5t)^2 + (5 \cos t - 5 \cos 5t)^2}\, dt \\
&= 20 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2 \text{ sen } t \text{ sen } 5t - 2 \cos t \cos 5t}\, dt \\
&= 20 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2 \cos 4t}\, dt \\
&= 20 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \text{ sen}^2 2t}\, dt \\
&= 40 \int_0^{\pi/2} \text{sen } 2t\, dt \\
&= -20 \Big[\cos 2t \Big]_0^{\pi/2} \\
&= 40
\end{aligned}
$$

Para la epicicloide de la Figura 9.31, parece correcta una longitud de arco de 40, ya que la circunferencia de un círculo de radio 6 es $2\pi r = 12\pi \approx 37.7$. □



EJEMPLO 5 Longitud de una cinta magnetofónica

Una cinta magnetofónica de 0,001 pulgadas de grosor se enrolla en un carrete cuyos radios interior y exterior son de 0,5 y 2 pulgadas, respectivamente. ¿Cuánta cinta se necesita para llenar el carrete?

Solución: Para construir un modelo de este problema, supongamos que al enrollar la cinta, su distancia r al centro crece linealmente a razón de 0,001 por vuelta, esto es,

$$r = (0{,}001)\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2.000\pi}, \quad 1.000\pi \leqslant \theta \leqslant 4.000\pi$$

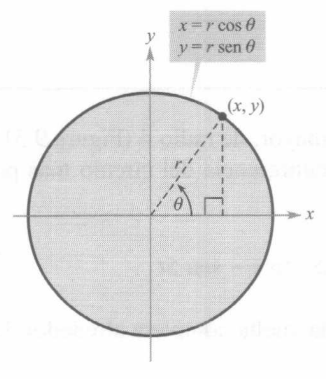


FIGURA 9.32
Se necesitan unos 982 pies de cinta para llenar el carrete.

donde θ se mide en radianes. Podemos determinar las coordenadas del punto (x, y) correspondiente a un radio dado, que son

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \text{ sen } \theta$$

Sustituyendo r obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = \left(\frac{\theta}{2.000\pi}\right)\cos \theta \quad \text{e} \quad y = \left(\frac{\theta}{2.000\pi}\right)\text{sen } \theta$$

Aplicando la fórmula de la longitud de arco, se obtiene que la longitud total de cinta es

$$\begin{aligned} s &= \int_{1.000\pi}^{4.000\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2.000\pi} \int_{1.000\pi}^{4.000\pi} \sqrt{(-\theta \text{ sen } \theta + \cos \theta)^2 + (\theta \cos \theta + \text{sen } \theta)^2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2.000\pi} \int_{1.000\pi}^{4.000\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta \qquad \text{Tablas de integración (apéndice), fórmula 26} \\ &= \frac{1}{2.000\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\left[\theta\sqrt{\theta^2+1} + \ln|\theta + \sqrt{\theta^2+1}|\right]_{1.000\pi}^{4.000\pi} \\ &\approx 11.781 \text{ pulgadas} \approx 982 \text{ pies} \end{aligned}$$

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre las matemáticas de una cinta magnetofónica puede consultarse el artículo «Tape Counters», de Richard L. Roth, en *The American Mathematical Monthly*, agosto-septiembre 1992. □

Nota. La gráfica de $r = a\theta$ se llama **espiral de Arquímedes**. La gráfica de $r = \theta/2.000\pi$ (Ejemplo 5) es de este tipo.

Puede estimarse la longitud de la cinta del Ejemplo 5 sumando las longitudes de piezas circulares de cinta. La más pequeña tendría radio 0,501 y la más grande, 2.

$$\begin{aligned} s &\approx 2\pi(0{,}501) + 2\pi(0{,}502) + 2\pi(0{,}503) + \cdots + 2\pi(2{,}000) \\ &= \sum_{i=1}^{1.500} 2\pi(0{,}5 + 0{,}001i) \\ &= 2\pi[1.500(0{,}5) + 0{,}001(1.500)(1.501)/2] \\ &\approx 11.786 \text{ pulgadas} \end{aligned}$$

Área de una superficie de revolución

Utilizando la fórmula del área de una superficie de revolución en forma rectangular es posible encontrar una fórmula del área de la superficie en forma paramétrica.

ADVERTENCIA Es fácil recordar estas fórmulas si se piensa en la diferencial de la longitud de arco como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

De ese modo las fórmulas se escriben

1. $S = 2\pi \int_a^b g(t)\, ds$
2. $S = 2\pi \int_a^b f(t)\, ds$

TEOREMA 9.9 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Si una curva suave C dada por $x = f(t)$ e $y = g(t)$ no tiene autointersecciones en el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, el área S de la superficie de revolución obtenida por rotación de C en torno a un eje de coordenadas viene dada por las siguientes expresiones:

1. $S = 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ Revolución en torno al eje x: $g(t) \geqslant 0$
2. $S = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ Revolución en torno al eje y: $f(t) \geqslant 0$

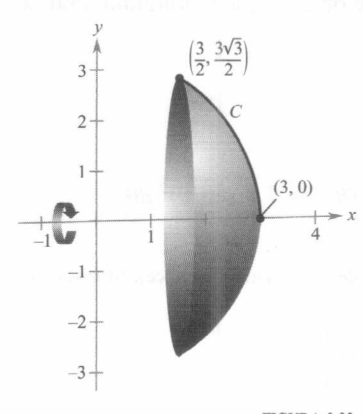


FIGURA 9.33
El área de esta superficie de revolución es 9π.

EJEMPLO 6 Determinación del área de una superficie de revolución

Sea C el arco de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9$$

de (3, 0) a $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$, mostrado en la Figura 9.33. Hallar el área de la superficie generada por revolución de C alrededor del eje x.

Solución: Podemos representar C mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 \cos t \quad \text{e} \quad y = 3 \text{ sen } t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/3$$

(Se puede determinar el intervalo de valores de t observando que $t = 0$ corresponde a $x = 3$ y $t = \pi/3$ corresponde a $x = 3/2$.) En este intervalo C es suave y no negativa, por lo que podemos aplicar el Teorema 9.9 para obtener el área.

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{\pi/3} (3 \text{ sen } t)\sqrt{(-3 \text{ sen } t)^2 + (3 \cos t)^2}\, dt \\
&= 6\pi \int_0^{\pi/3} \text{sen } t\sqrt{9(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt \\
&= 6\pi \int_0^{\pi/3} 3 \text{ sen } t\, dt \\
&= -18\pi\Big[\cos t\Big]_0^{\pi/3} \\
&= -18\pi\left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
&= 9\pi
\end{aligned}$$

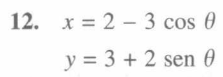
□

Ejercicios de la Sección 9.3

En los Ejercicios 1-10, determinar dy/dx y d^2y/dx^2 y evaluar cada una de ellas en el valor indicado del parámetro.

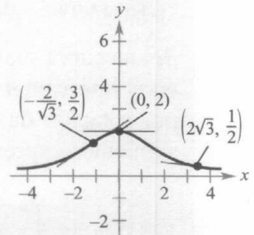
	Ecuaciones paramétricas	*Punto*
1.	$x = 2t,\ y = 3t - 1$	$t = 3$
2.	$x = \sqrt{t},\ y = 3t - 1$	$t = 1$
3.	$x = t + 1,\ y = t^2 + 3t$	$t = -1$
4.	$x = t^2 + 3t,\ y = t + 1$	$t = 0$
5.	$x = 2 \cos \theta,\ y = 2 \text{ sen } \theta$	$\theta = \frac{\pi}{4}$
6.	$x = \cos \theta,\ y = 3 \text{ sen } \theta$	$\theta = 0$
7.	$x = 2 + \sec \theta,\ y = 1 + 2 \text{ tg } \theta$	$\theta = \frac{\pi}{6}$
8.	$x = \sqrt{t},\ y = \sqrt{t - 1}$	$t = 2$
9.	$x = \cos^3 \theta,\ y = \text{sen}^3 \theta$	$\theta = \frac{\pi}{4}$
10.	$x = \theta - \text{sen } \theta,\ y = 1 - \cos \theta$	$\theta = \pi$

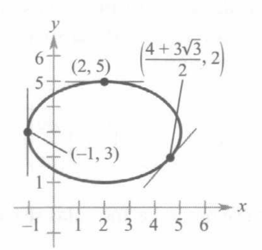
En los Ejercicios 11 y 12, encontrar una ecuación de la recta tangente en cada uno de los puntos indicados de la curva.



11. $x = 2 \text{ ctg } \theta$
$y = 2 \text{ sen}^2 \theta$

12. $x = 2 - 3 \cos \theta$
$y = 3 + 2 \text{ sen } \theta$





En los Ejercicios 13-16, *a*) dibujar la curva definida por las ecuaciones paramétricas con ayuda de una calculadora, *b*) utilizar la calculadora para hallar dx/dt, dy/dt y dy/dx en

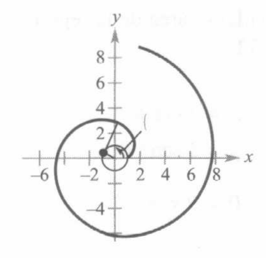
el valor del parámetro que se especifica, *c*) encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva en el valor indicado del parámetro, y *d*) confirmar el resultado de *c*) representando la recta tangente en la calculadora.

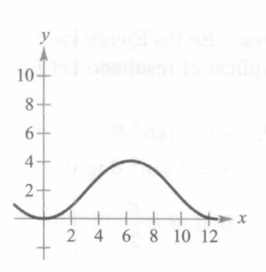
	Ecuaciones paramétricas	*Parámetro*
13.	$x = 2t,\ y = t^2 - 1$	$t = 2$
14.	$x = t - 1,\ y = \frac{1}{t} + 1$	$t = 1$
15.	$x = t^2 - t + 2,\ y = t^3 - 3t$	$t = -1$
16.	$x = 4 \cos \theta,\ y = 3 \operatorname{sen} \theta$	$\theta = \frac{3\pi}{4}$

En los Ejercicios 17 y 18, hallar todos los puntos de tangencia vertical u horizontal (si existe alguno) a la porción de curva mostrada.

17. Involuta de un círculo:
$x = \cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta$
$y = \operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta$

18. $x = 2\theta$
$y = 2(1 - \cos \theta)$





En los Ejercicios 19-28, hallar todos los puntos de tangencia vertical u horizontal (si existe alguno) a la curva. Representar la curva en una calculadora y verificar los resultados.

19. $x = 1 - t,\ y = t^2$

20. $x = t + 1,\ y = t^2 + 3t$

21. $x = 1 - t,\ y = t^3 - 3t$

22. $x = t^2 - t + 2,\ y = t^3 - 3t$

23. $x = 3 \cos \theta,\ y = 3 \operatorname{sen} \theta$

24. $x = \cos \theta,\ y = 2 \operatorname{sen} 2\theta$

25. $x = 4 + 2 \cos \theta$
$y = -1 + \operatorname{sen} \theta$

26. $x = 4 \cos^2 \theta$
$y = 2 \operatorname{sen} \theta$

27. $x = \sec \theta,\ y = \operatorname{tg} \theta$

28. $x = \cos^2 \theta,\ y = \cos \theta$

29. ***Para pensar*** Esbozar la gráfica de una curva de ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ e $y = f(t)$ tales que $dx/dt > 0$ y $dy/dt < 0$ para todo número real t.

30. ***Para pensar*** Esbozar la gráfica de una curva de ecuaciones paramétricas $x = g(t)$ e $y = f(t)$ tales que $dx/dt < 0$ y $dy/dt < 0$ para todo número real t.

Longitud de arco En los Ejercicios 31-36, calcular la longitud de arco de la curva dada en el intervalo indicado.

	Ecuaciones paramétricas	*Intervalo*
31.	$x = e^{-t} \cos t,\ y = e^{-t} \operatorname{sen} t$	$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$
32.	$x = t^2,\ y = 4t^3 - 1$	$-1 \leqslant t \leqslant 1$
33.	$x = t^2,\ y = 2t$	$0 \leqslant t \leqslant 2$
34.	$x = \operatorname{arcsen} t,\ y = \ln \sqrt{1 - t^2}$	$0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$
35.	$x = \sqrt{t},\ y = 3t - 1$	$0 \leqslant t \leqslant 1$
36.	$x = t,\ y = \frac{t^5}{10} + \frac{1}{6t^3}$	$1 \leqslant t \leqslant 2$

Longitud de arco En los Ejercicios 37-40, calcular la longitud de arco de la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$.

37. Hipocicloide: $x = a \cos^3 \theta,\ y = a \operatorname{sen}^3 \theta$

38. Circunferencia: $x = a \cos \theta,\ y = a \operatorname{sen} \theta$

39. Arco de cicloide: $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta),\ y = a(1 - \cos \theta)$

40. Involuta de circunferencia: $x = \cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta$,
$y = \operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta$

41. ***Trayectoria de un proyectil*** Las siguientes ecuaciones paramétricas proporcionan un modelo para la trayectoria de un proyectil.

$$x = (90 \cos 30^\circ)t \quad \text{e} \quad y = (90 \operatorname{sen} 30^\circ)t - 16t^2$$

donde x e y se miden en pies. Usando una calculadora, efectuar lo siguiente.

a) Representar gráficamente la trayectoria del proyectil.
b) Estimar el alcance del proyectil.
c) Con un programa de integración, estimar la longitud de arco de la trayectoria. Comparar el resultado con el alcance del proyectil.

42. ***Perímetro de una elipse*** Utilizando un programa de integración, estimar el perímetro de la elipse dada por las ecuaciones paramétricas $x = 3 \cos \theta$ e $y = 4 \operatorname{sen} \theta$.

43. ***Redacción***

a) Con ayuda de una calculadora, representar gráficamente los siguientes conjuntos de ecuaciones paramétricas

$$x = t - \operatorname{sen} t \qquad x = 2t - \operatorname{sen}(2t)$$
$$y = 1 - \cos t \qquad y = 1 - \cos(2t)$$
$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

b) Comparar las dos gráficas del apartado *a*). Si la curva representa el movimiento de una partícula y *t* el tiempo, ¿qué se puede inferir acerca de la velocidad media de la partícula en las trayectorias representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas?

c) Sin dibujar la curva, determinar el tiempo requerido por una partícula para recorrer la misma trayectoria que en los apartados *a*) y *b*) si esta última está descrita por

$$x = \tfrac{1}{2}t - \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}t\right) \quad \text{e} \quad y = 1 - \cos\left(\tfrac{1}{2}t\right)$$

44. ***Folium de Descartes*** Dadas las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{4t}{1+t^3} \quad \text{e} \quad y = \frac{4t^2}{1+t^3}$$

usar una calculadora para llevar a cabo lo siguiente.

a) Dibujar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas.

b) Hallar los puntos de tangencia horizontal a la curva.

c) Utilizando un programa de integración, estimar la longitud de arco del lazo cerrado. (*Ayuda:* Usar la simetría e integrar sobre el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 1$.)

Área de una superficie En los Ejercicios 45-50, calcular el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor del eje indicado.

45. $x = t$, $y = 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 4$, *a*) eje *x* *b*) eje *y*

46. $x = t$, $y = 4 - 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, *a*) eje *x* *b*) eje *y*

47. $x = 4\cos\theta$, $y = 4\operatorname{sen}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, eje *y*

48. $x = t^3$, $y = t + 2$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, eje *y*

49. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\operatorname{sen}^3\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, eje *x*

50. $x = a\cos\theta$, $y = b\operatorname{sen}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, *a*) eje *x* *b*) eje *y*

51. ***Área de una superficie*** Se suprime una porción de una esfera de radio *r* cortando un cono circular con vértice en el centro de la esfera. Hallar el área sustraída de la esfera si el ángulo del cono en el vértice es 2θ.

52. Utilizando integración por sustitución, demostrar que si *y* es una función continua de *x* en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, donde $x = f(t)$ e $y = g(t)$, entonces

$$\int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t)f'(t)\,dt$$

donde $f(t_1) = a$, $f(t_2) = b$ y *g* y f' son ambas continuas en $[t_1, t_2]$.

Centroide En los Ejercicios 53 y 54, determinar el centroide de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones paramétricas y los ejes de coordenadas. (Aplicar el resultado del Ejercicio 52.)

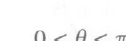
53. $x = \sqrt{t}$, $y = 4 - t$ **54.** $x = \sqrt{4-t}$, $y = \sqrt{t}$

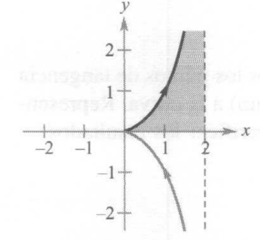
Volumen En los Ejercicios 55 y 56, hallar el volumen del sólido obtenido por revolución de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones en torno al eje *x*. (Aplicar el resultado del ejercicio 52.)

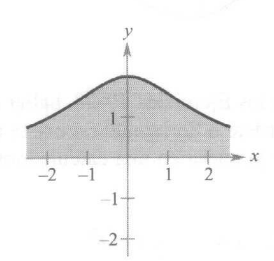
55. $x = 3\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$ **56.** $x = \cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$

Área En los Ejercicios 57 y 58, hallar el área de la región. (Aplicar el resultado del Ejercicio 52.)

57. $x = 2\operatorname{sen}^2\theta$
$y = 2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{tg}\theta$
$0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$

58. $x = 2\operatorname{ctg}\theta$
$y = 2\operatorname{sen}^2\theta$

$0 < \theta < \pi$





Áreas de curvas cerradas simples En los Ejercicios 59-64, usar un programa de integración simbólica y el resultado del Ejercicio 52, para asignar a cada curva cerrada su área. (Estos ejercicios se han adaptado del artículo «The Surveyor's Area Formula» de Bart Braden, publicado en *College Mathematics Journal,* septiembre de 1986, con permiso del autor.)

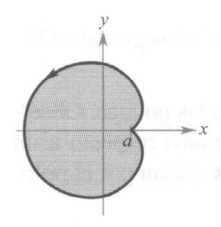
a) $\frac{8}{3}ab$ *b*) $\frac{3}{8}\pi a^2$ *c*) $2\pi a^2$

d) πab *e*) $2\pi ab$ *f*) $6\pi a^2$

59. Elipse: $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

$x = b \cos t$

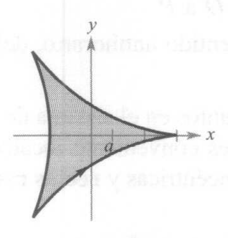
$y = a \operatorname{sen} t$



60. Astroide: $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

$x = a \cos^3 t$

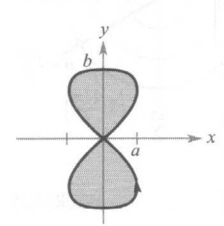
$y = a \operatorname{sen}^3 t$



61. Cardioide: $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

$x = 2a \cos t - a \cos 2t$

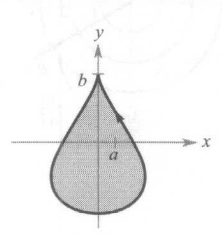
$y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$



62. Delta: $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

$x = 2a \cos t + a \cos 2t$

$y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$



63. Lemniscata: $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

$x = a \operatorname{sen} 2t$

$y = b \operatorname{sen} t$

64. Lágrima: $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

$x = 2a \cos t - a \operatorname{sen} 2t$

$y = b \operatorname{sen} t$

65. Utilizando una calculadora, dibujar la curva dada por

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad -20 \leqslant t \leqslant 20$$

a) Describir la gráfica y confirmar analíticamente el resultado.

b) Discutir la velocidad a la que se recorre la curva cuando se incrementa t de -20 a 20.

66. ***Tractriz*** Una persona camina desde el origen a lo largo del semieje y positivo arrastrando un peso sujeto al extremo de una cuerda de 12 metros. Inicialmente, el peso está situado en el punto (12, 0).

a) En el Ejercicio 67 de la Sección 7.4, se demostró que la trayectoria del peso admite como modelo la ecuación rectangular

$$y = -12 \ln\left(\frac{12 - \sqrt{144 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{144 - x^2}$$

donde $0 < x \leqslant 12$. Usando una calculadora, representar gráficamente la ecuación rectangular.

b) Representar gráficamente con una calculadora las ecuaciones paramétricas

$$x = 12 \operatorname{sh} \frac{t}{12} \quad \text{e} \quad y = t - 12 \operatorname{th} \frac{t}{12}$$

donde $t \geqslant 0$. ¿Cómo está relacionada esta gráfica con la del apartado *a*)? ¿Qué gráfica piensa que representa mejor la trayectoria?

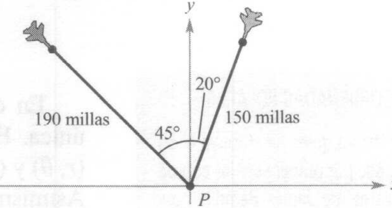
c) Utilizar las ecuaciones paramétricas de la tractriz para comprobar que la distancia de la y-intersección de la recta tangente al punto de tangencia es independiente de la localización de dicho punto.

67. ***Control del tráfico aéreo*** Un controlador detecta dos aviones volando uno hacia el otro a la misma altitud (véase figura). Sus trayectorias de vuelo son S 20° O y S 45° E. Uno de los aviones se encuentra a 150 millas del punto P y lleva una velocidad de 375 millas por hora. El otro está a 190 millas de P con una velocidad de 450 millas por hora.

a) Encontrar ecuaciones paramétricas de la trayectoria de cada avión en las que t sea el tiempo en horas y $t = 0$ represente el instante en que el controlador aéreo detecta los aviones.

b) Usar el resultado del apartado *a*) para expresar la distancia entre los aviones en función de t.

c) Dibujar la función del apartado *b*) en una calculadora. ¿Cuándo será mínima la distancia entre los aviones? Si los aviones deben mantener una separación de al menos 3 millas, ¿se cumple el requisito?



68. Sean $x = g(t)$ e $y = f(t)$ las ecuaciones paramétricas de una curva plana C. Interpretar el teorema del valor medio generalizado en este caso.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 69 y 70, determinar si el enunciado es correcto. Si no lo es, explicar por qué o dar un ejemplo que muestre su falsedad.

69. Si $x = f(t)$ e $y = g(t)$, entonces $d^2y/dx^2 = g''(t)/f''(t)$.

70. La curva dada por $x = t^3$, $y = t^2$ tiene tangente horizontal en el origen porque $dy/dt = 0$ en $t = 0$.